

विध्न विचारत भीरु जन, नहीं आरम्भे काम,
 विपति देख छोड़े तुरंत मध्यम मन कर श्याम।
 पुरुष सिंह संकल्प कर, सहते विपति अनेक,
 'बना' न छोड़े ध्येय को, रघुबर राखे टेक।।

रचित: मानव धर्म प्रणेता

सद्गुरु श्री रणछोड़दासजी महाराज

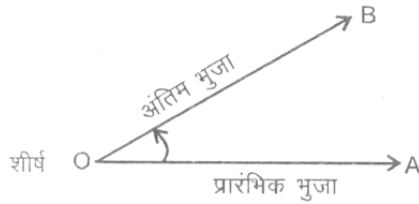
त्रिकोणमितीय फलन (Trigonometric functions)

When writing about transcendental issues, be transcendently fearless..... Descartes, Rene

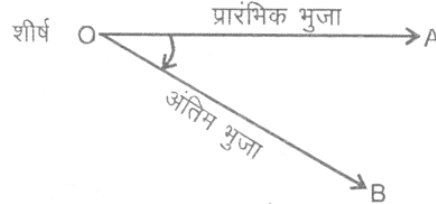
शब्द 'त्रिकोणमिति' दो ग्रीक अक्षरों 'त्रिकोण' तथा 'मिति' से मिलकर बना है। तथा इसका अर्थ होता है – "एक त्रिभुज की भुजाओं और कोणों का मापन",

कोण (Angle):

कोण किसी बिन्दु से किसी किरण के घुमाव की माप है। वास्तविक किरण प्रारम्भिक भुजा और किरण की अंतिम स्थिति घूर्णन के बाद कोण मापन कहते हैं। घुमाव का बिन्दु शीर्ष कहलाता है। यदि घुमाव की दिशा वामावर्त (anticlockwise) है, तो कोण धनात्मक होता है तथा यदि घुमाव की दिशा दक्षिणावर्त (clockwise) है तो ऋणात्मक होता है।



(i) धनात्मक कोण
(वामावर्त मापन)



(ii) ऋणात्मक कोण
(दक्षिणावर्त मापन)

कोण के मापन की पद्धतियाँ (System For Measurement of Angles) :

एक कोण निम्न पद्धतियों में मापा जा सकता है।

1. **Sexagesimal System (British System) :** इस पद्धति में एक सम्पूर्ण घुमाव का $\frac{1}{360}$ भाग एक डिग्री ($^{\circ}$) का $\frac{1}{60}$ भाग

एक मिनट ($'$) और एक मिनट का $\frac{1}{60}$ भाग एक सैकण्ड ($''$) कहलाता है।

2. **Centesimal System (French System) :** इस पद्धति में एक सम्पूर्ण वृत्तीय घुमाव का $\frac{1}{400}$ भाग एक ग्रेड ($^{\circ}$), एक ग्रेड

का $\frac{1}{100}$ का भाग एक मिनट ($'$) और मिनट का $\frac{1}{100}$ भाग एक सैकण्ड ($''$) कहलाता है।

$$\therefore \text{एक समकोण} = 100^{\circ}; \quad 1^{\circ} = 100'; \quad 1' = 100''$$

नोट : सेक्ससेसिमल पद्धति (Sexagesimal system) में मिनट एवं सैकण्ड, सेन्टेसीमल पद्धति (Centesimal System) से भिन्न है। दोनों पद्धतियों में चिन्ह भी भिन्न है।

3. वृत्तीय पद्धति (Circular System (Radian Measurement))

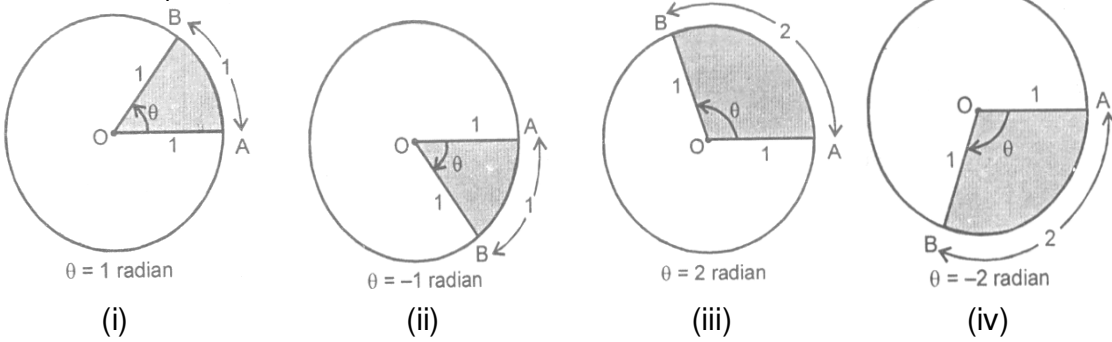
किसी वृत्त चाप द्वारा जिसकी लम्बाई त्रिज्या के बराबर है द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण एक रेडियन कहलाता है। इस पद्धति में माप की इकाई रेडियन ($^{\circ}$) है।

जिस प्रकार इकाई त्रिज्या के वृत्त की परिधि 2π होती है, इसलिए प्रारम्भिक भुजा का एक सम्पूर्ण चक्कर 2π रेडियन कोण बनाता है।

विस्तारपूर्वक r त्रिज्या के एक वृत्त में r लम्बाई के चाप द्वारा बनाया गया कोण जिसका माप 1 रेडियन है। एक l लम्बाई का चाप

$\frac{l}{r}$ रेडियन का कोण बनाएगा। इस प्रकार r त्रिज्या के एक वृत्त में l लम्बाई का चाप θ रेडियन कोण केन्द्र पर बनाता है।

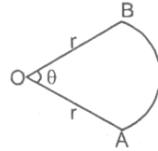
इस प्रकार $\theta = \frac{l}{r}$ या $l = r\theta$



नोट : यदि कोई चिन्ह न दिया हो जबकि कोण माप हो, तो यह माना जा सकता है कि यह माप रेडियन में है
 e.g. $\theta = 15 \Rightarrow 15$ रेडियन

वृत्तीय भाग का क्षेत्रफल

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} r^2 \theta$$



रेडियन, डिग्री एवं ग्रेड के बीच सम्बन्ध (Relation between radian, degree and grade):

$$\frac{\pi}{3} \text{ radian} = 90^{\circ} = 100^g$$

न्यूनकोणों के लिए त्रिकोणमितिय अनुपात (Trigonometric Ratios for Acute Angles):

माना एक किरण OP, OA से प्रारम्भ होती है, और OP की स्थिति में घूमती है, इस प्रकार कोण AOP बनता है।

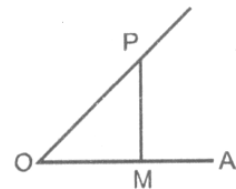
किरण में एक बिन्दु P लें और P से OA पर लम्ब PM बनायें।

समकोण त्रिभुज MOP में P विकर्ण है, PM लम्ब तथा OM आधार है,

अब कोण AOP के लिए त्रिकोणमितिय अनुपात या फलन इस प्रकार दिये जाते हैं।

$\frac{MP}{OP}$, i.e. $\frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$, कोण AOP का sine है।

$\frac{OM}{OP}$, i.e. $\frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$, कोण AOP का cosine है।



$\frac{MP}{OM}$, i.e. $\frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$, कोण AOP का tangent है।

$\frac{OM}{MP}$, i.e. $\frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$, कोण AOP का cotangent है।

$\frac{OP}{OM}$, i.e. $\frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$, कोण AOP का secant है।

$\frac{OP}{MP}$, i.e. $\frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$ कोण AOP का cosecant है।

जिस मात्रा द्वारा cosine इकाई से कम होता जाता है,

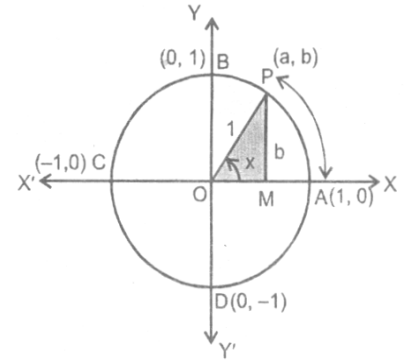
अर्थात् $1 - \cos AOP$, AOP का Versed Sine कहलाता है और जिस मात्रा द्वारा sine इकाई से कम होता है, अर्थात् $1 - \sin AOP$, AOP का Covered sine कहलाता है।

सभी त्रिकोणमिति अनुपात वास्तविक संख्याएँ हैं। संक्षिप्त में इन अनुपातों को क्रमशः इस प्रकार जिखा जा सकता है—
 $\sin AOP$, $\cos AOP$, $\tan AOP$, $\cot AOP$, $\csc AOP$, $\sec AOP$, vers AOP तथा covers AOP

कोण $\theta \in \mathbf{R}$ के लिए त्रिकोणमिति अनुपात :

अब हम त्रिकोणमितीय अनुपात की परिभाषा को एक कोण रेडियन के संदर्भ में आगे बढ़ाते हैं और उन्हें त्रिकोणमिति फलन के रूप में अध्ययन करते हैं। (वृत्तीय फलन)

माला एक इकाई वृत्त (त्रिज्या 1 इकाई) जिसका केन्द्र निर्देशांक अक्षों का मूलबिन्दु है। माना $P(a, b)$ वृत्त पर इस प्रकार है कि कोण $AOP = x$ रेडियन अर्थात् इस प्रकार चार AP की लम्बाई = x हम $\cos x = a$ और $\sin x = b$ परिभाषित करते हैं चूंकि $\triangle OMP$ एक समकोण त्रिभुज है अतः $OM^2 + MP^2 = OP^2$ या $a^2 + b^2 = 1$ इस प्रकार वृत्त पर उपस्थित प्रत्येक बिन्दु के लिए $a^2 + b^2 = 1$ या $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$



चूंकि एक सम्पूर्ण चक्कर वृत्त के केन्द्र पर 2π कोण बनाता है।

$\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, $\angle AOC = \pi$ तथा $\angle AOD = \frac{3\pi}{2}$ के पूर्णांक गुणांक कोण चतुर्थांश कोण कहलाते हैं। बिन्दुओं A, B, C तथा D के निर्देशांक क्रमशः $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ तथा $(0, -1)$ हैं। अतः चतुर्थांश कोणों के लिए हम कह सकते हैं —

$$\cos 0 = 1 \quad \sin 0 = 0,$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos \pi = -1 \quad \sin \pi = 0$$

$$\cos \frac{3\pi}{2} = 0 \quad \sin \frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\cos 2\pi = 1 \quad \sin 2\pi = 0$$

अब यदि हम स्थिति OP से एक सम्पूर्ण चक्कर लें, तो हम पुनः प्रारम्भिक स्थिति OP पर वापस आ जात है इस प्रकार हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि यदि x किसी 2π के पूर्णांक से बढ़ता है (या घटता है) तो \sin तथा \cos फलनों का मान परिवर्तित नहीं होता है, इस प्रकार

$$\sin(2n\pi + x) = \sin x, n \in \mathbf{Z}, \cos(2n\pi + x) = \cos x, n \in \mathbf{Z}$$

और $\sin x = 0$, यदि $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ i.e., जब x, π का पूर्णांक गुणांक है तथा $\cos x = 0$, यदि

$x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \dots$ i.e., $\cos x$ का मान शून्य हो जाता है जब $x, \frac{\pi}{2}$ का विषम गुणांक है।

$\sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi$ जहाँ n कोई पूर्णांक है।

$\cos x = 0 \Rightarrow x = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$, जहाँ n कोई पूर्णांक है।

अब हम अन्य त्रिकोणमितिय अनुपातों को \sin और \cos फलन के रूप में व्यक्त करते हैं।

$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, x \neq n\pi$ जहाँ n कोई पूर्णांक है।

$\sec x = \frac{1}{\cos x}, x \neq (2n+1) \frac{\pi}{2}$, जहाँ n कोई पूर्णांक है।

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, x \neq (2n+1) \frac{\pi}{2}$, जहाँ n कोई पूर्णांक है।

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, x \neq n\pi$ जहाँ n कोई पूर्णांक है।

हम प्रदर्शित कर चुके हैं कि सभी वास्तविक x के लिए $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

इस प्रकार $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ (Think!) $\{x \neq (2n+1) \frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}\}$

$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$ (Think!) $\{x \neq n\pi; n \in \mathbb{Z}\}$

त्रिकोणमितिय फलनों के चिन्ह (Signs of The Trigonometric Functions) :

- (i) यदि θ I चतुर्थांश में है तब $P(a, b)$ I चतुर्थांश में रहता है। अतः $a > 0, b > 0$ तथा इस प्रकार सभी त्रिकोणमितिय फलनों का मान धनात्मक है।
- (ii) यदि θ II चतुर्थांश में है तब $P(a, b)$ II चतुर्थांश में रहता है। अतः $a < 0, b > 0$ तथा इस प्रकार $\sin, \operatorname{cosec}$ के मान धनात्मक और शेष ऋणात्मक है।
- (iii) यदि θ III चतुर्थांश में है तब $P(a, b)$ III चतुर्थांश में रहता है। अतः $a < 0, b < 0$ तथा इस प्रकार \tan, \cot के मान धनात्मक और शेष ऋणात्मक है।
- (iv) यदि θ IV चतुर्थांश में है तब $P(a, b)$ IV चतुर्थांश में रहता है। अतः $a > 0, b < 0$ तथा इस प्रकार \cos, \sec के मान धनात्मक और शेष ऋणात्मक है।
कुछ महत्वपूर्ण कोणों के त्रिकोणमितिय फलनों का मान नीचे दी गई सारणी में दिये गये हैं

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	$\sqrt{\frac{0}{4}} = 0$	$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{4}{4}} = 1$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	N.D

N.D = परिभाषित

$\operatorname{cosec} x, \sec x$ तथा $\cot x$ के मान क्रमशः $\sin x, \cos x$ तथा $\tan x$ के प्रतिलोम है।

सम्बद्ध कोणों के त्रिकोणमितिय अनुपात (Trigonometric Ratios of allied angles)

यदि θ एक कोण है, तब $-\theta, \frac{\pi}{2} \pm \theta, \pi \pm \theta, \frac{3\pi}{2} \pm \theta, 2\pi \pm \theta$ इत्यादि सम्बद्ध कोण कहलाते हैं।

● **$-\theta$ के त्रिकोणमितिय अनुपात :**

यदि I चतुर्थांश में एक निश्चित स्थिति में कोण θ है। माना इसकी अंतिम भुजा, एक वृत्त जिसका केन्द्र O तथा त्रिज्या r को P (x, y) पर काटती है।

माना अंतिम भुजा का वृत्त के साथ $-\theta$ कोण पर कटाक्ष बिन्दु P'(x', y') है।

अब $\angle MOP = \angle MOP'$ (संख्यात्मक) और P एवं P' के x अक्ष पर समान प्रक्षेप M है।

$$\therefore \Delta OMP \equiv OMP' \Rightarrow x = x' \text{ तथा } y = y'$$

$$\therefore \sin(-\theta) = \frac{y'}{r} = \frac{-y}{r} = -\sin \theta.$$

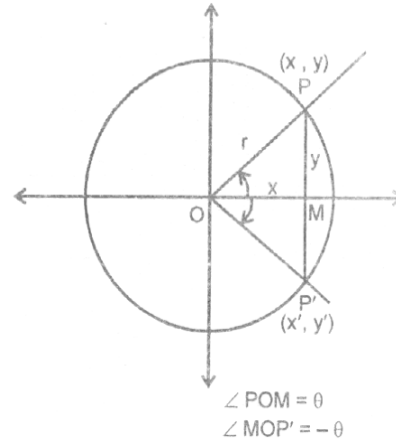
$$\cos(-\theta) = \frac{x'}{r} = \frac{x}{r} = \cos \theta.$$

$$\tan(-\theta) = \frac{y'}{x'} = -\frac{y}{x} = -\tan \theta.$$

$$\cot(-\theta) = \frac{x'}{y'} = \frac{x}{-y} = -\cot \theta.$$

$$\sec(-\theta) = \frac{r}{x'} = \frac{r}{x} = \sec \theta.$$

$$\operatorname{cosec}(-\theta) = \frac{r}{y'} = \frac{r}{-y} = -\operatorname{cosec} \theta.$$



सामान्य θ अन्य चतुर्थांशों में हो तब ऊपर दिये गए परिणाम सिद्ध किए जा सकते हैं।

● **$\pi - \theta$ के त्रिकोणमितिय अनुपात**

माना I चतुर्थांश में निश्चित स्थिति में कोई कोण θ है। माना इसकी अंतिम भुजा एक वृत्त जिसका केन्द्र O तथा त्रिज्या r है, को P (x, y) पर काटता है।

माना अंतिम भुजा का वृत्त के साथ $\pi - \theta$ कोण पर कटाक्ष बिन्दु P'(x', y') है।

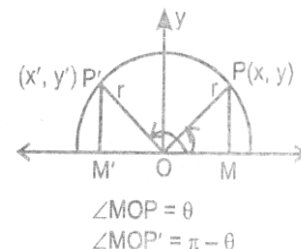
माना M तथा M' क्रमशः P तथा P' के x-अक्ष पर प्रक्षेप है।

चूँकि $\Delta OM'P' \equiv OMP$, $x' = -x$, $y' = y$

$$\therefore \sin(\pi - \theta) = \frac{y'}{r} = \frac{y}{r} = \sin \theta.$$

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{x'}{r} = -\frac{x}{r} = -\cos \theta.$$

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{y'}{x'} = \frac{y}{-x} = -\tan \theta.$$



$$\cot(\pi - \theta) = \frac{x'}{y'} = -\frac{x}{y} = -\cot \theta.$$

$$\sec(\pi - \theta) = \frac{r}{x'} = \frac{r}{-x} = -\sec \theta.$$

$$\operatorname{cosec}(\pi - \theta) = \frac{r}{y'} = \frac{r}{y} = \operatorname{cosec} \theta.$$

● $\frac{\pi}{2} - \theta$ के त्रिकोणमितिय अनुपात :

समानत: नीचे दिये गए परिणाम सिद्ध किए जा सकते हैं।

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta, \quad \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec \theta.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta, \quad \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{cosec} \theta$$

● $\frac{\pi}{2} + \theta$ के त्रिकोणमितिय अनुपात :

समानत: नीचे दिये गये परिणाम सिद्ध किए जा सकते हैं।

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta, \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta, \quad \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sec \theta.$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta, \quad \cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta, \quad \sec\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\operatorname{cosec} \theta$$

● $\pi + \theta$ के त्रिकोणमितिय अनुपात :

समानत: नीचे दिये गए परिणाम सिद्ध किए जा सकते हैं।

$$\begin{aligned} \sin(\pi + \theta) &= -\sin \theta & \tan(\pi + \theta) &= \tan \theta, & \operatorname{cosec}(\pi + \theta) &= -\operatorname{cosec} \theta, \\ \cos(\pi + \theta) &= -\cos \theta, & \cot(\pi + \theta) &= \cot \theta, & \sec(\pi + \theta) &= -\sec \theta \end{aligned}$$

● $\frac{3\pi}{2} - \theta$ के त्रिकोणमितिय अनुपात :

समानत: नीचे दिये गए परिणाम सिद्ध किए जा सकते हैं।

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos \theta, \quad \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta, \quad \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sec \theta.$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin \theta, \quad \cot\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta, \quad \sec\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\operatorname{cosec} \theta$$

● $\frac{3\pi}{2} + \theta$ के त्रिकोणमितिय अनुपात:

समानत: नीचे दिए गए परिणाम सिद्ध किए जा सकते हैं।

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cos \theta, \quad \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin \theta, \quad \tan\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\cot \theta.$$

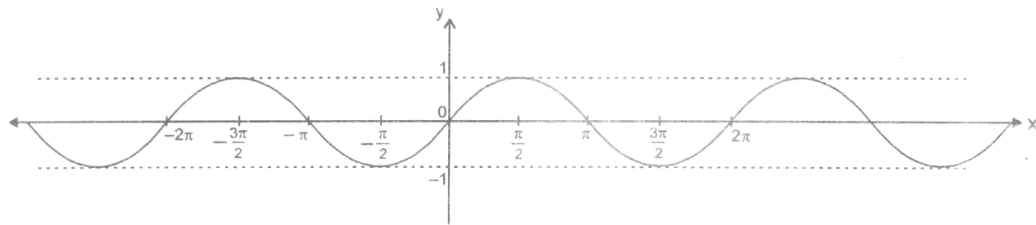
$$\cot\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\tan \theta, \quad \sec\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \operatorname{cosec} \theta, \quad \operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = -\sec \theta$$

नीचे दी गई सारणी में रिक्त स्थानों को भरिए।

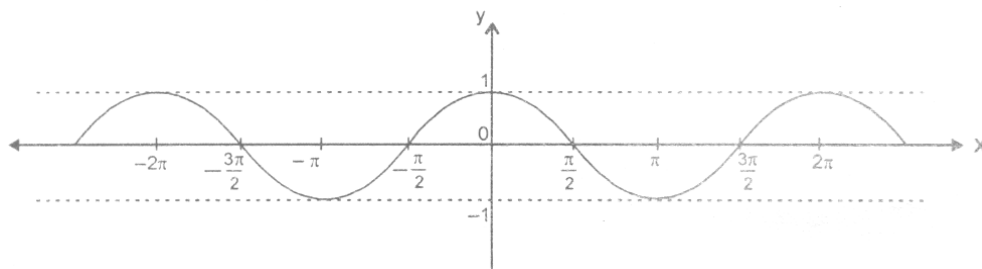
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1									
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0									
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	N.D.									

त्रिकोणमितीय फलन (Trigonometric functions) :

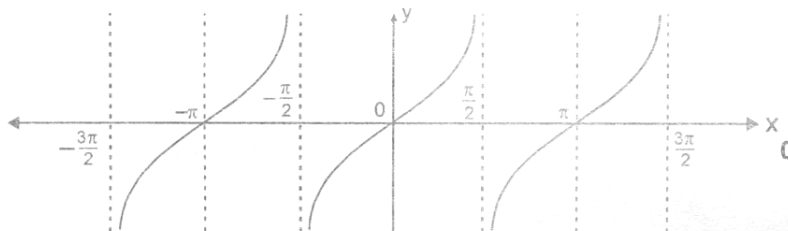
- (i) $y = \sin x$ प्रान्त: $x \in \mathbb{R}$
 परिसर : $y \in [-1, 1]$



- (ii) $y = \cos x$ प्रान्त: $x \in \mathbb{R}$
 परिसर : $y \in [-1, 1]$

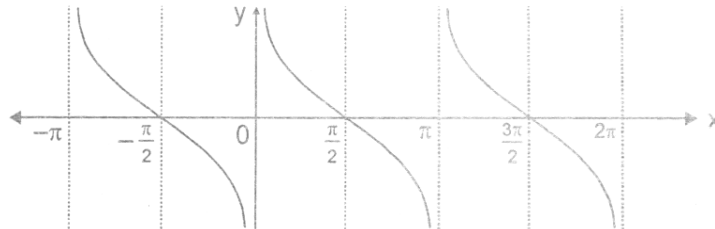


- (iii) $y = \tan x$ प्रान्त: $x \in \mathbb{R} - \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{I} \right\}$
 परिसर: $y \in \mathbb{R}$

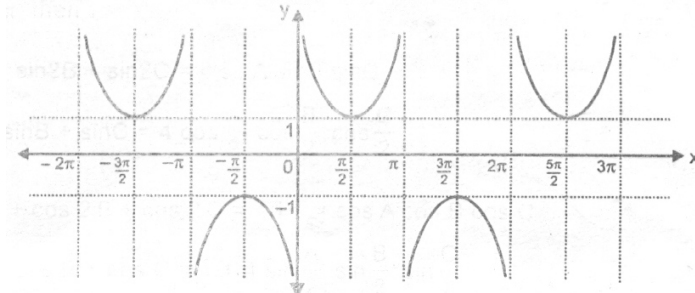


Download FREE Study Package from www.TekoClasses.com & Learn on Video
www.MathsBySuhag.com Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

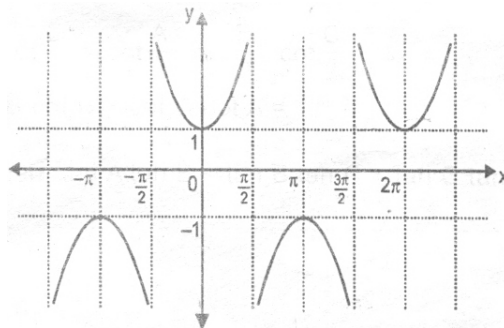
(iv) $y = \cot x$ प्रान्तः $x \in \mathbb{R} - \{n\pi\}, n \in \mathbb{I}$
परिसर : $y \in \mathbb{R}$



- (v) $y = \operatorname{cosec} x$ प्रान्त: $x \in \mathbb{R} - \{n\pi\}, n \in \mathbb{I}$
 परिसर: $y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



- (vi) $y = \sec x$ प्रान्त: $x \in \mathbb{R} - \left\{ (2n+1)\frac{\pi}{2} \right\}, n \in \mathbb{I}$
 परिसर: $y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



दो कोणों के योग और अन्तर के त्रिकोणमितिय फलन

(Trigonometric functions of sum or difference of two angles) :

- (a) $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$
 (b) $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$
 (c) $\sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$ $\sin(A+B) \cdot \sin(A-B)$
 (d) $\cos^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \sin^2 A = \cos(A+B) \cdot \cos(A-B)$
 (e) $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$
 (f) $\cot(A \pm B) = \frac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$
 (g) $\sin(A+B+C) = \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C + \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C$
 (h) $\cos(A+B+C) = \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C - \sin A \cos B \sin C - \sin A \sin B \cos C$
 (i) $\tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$
 (j) $\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \dots + \theta_n) = \frac{S_1 + S_3 + S_5 - \dots}{1 - S_2 + S_4 - \dots}$

जहाँ S_i कोणों के एक बार में i स्पर्शज्या के लेने पर गुणाओं का योग है।

परिवर्तन सूत्र (Transformation formulae) :

- (i) $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B$ (a) $\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$
 (ii) $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2 \cos A \sin B$ (b) $\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$

$$(iii) \quad \cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B \quad (c) \quad \cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$$

$$(iv) \quad \cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \sin A \sin B \quad (d) \quad \cos C - \cos D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{D-C}{2}$$

अपवर्त्य और अपवर्तक कोण (Multiple and sub-multiple angles) :

(a) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$
 Note : $\sin \theta = \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ etc.

(b) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A$
 Note : $2 \cos^2 \frac{\theta}{2} = 1 + \cos \theta$, $2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta$.

(c) $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$
 Note : $\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$

(d) $\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$, $\cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

(e) $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

(f) $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$

(g) $\tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A}$

**निश्चित कोणों के महत्वपूर्ण त्रिकोणमितीय अनुपात
 (Important trigonometric ratios of standard angles) :**

(a) $\sin n\pi = 0$; $\cos n\pi = (-1)^n$; $\tan n\pi = 0$, where $n \in I$

(b) $\sin 15^\circ$ or $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \cos 75^\circ$ or $\cos \frac{5\pi}{12}$;
 $\cos 15^\circ$ or $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \sin 75^\circ$ or $\sin \frac{5\pi}{12}$;
 $\tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3} = \cot 75^\circ$; $\tan 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3} = \cot 15^\circ$

(c) $\sin \frac{\pi}{10}$ or $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72^\circ$
 $\cos 36^\circ$ or $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \sin 54^\circ$

प्रतिबंधित सर्वसमिकाएँ (Conditinal Identities):

यदि $A + B + C = \pi$ हों तो:

- (i) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = \sin A \sin B \sin C$
- (ii) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$
- (iii) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$
- (iv) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$
- (v) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$
- (vi) $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$
- (vii) $\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$
- (viii) $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$
- (ix) $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ then $\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 1$

Sine और Cosine श्रेणी: (Sine and Cosine series) :

$$(i) \quad \sin \alpha + \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha + 2\beta) + \dots + \sin \{\alpha + (n-1)\beta\} = \frac{\sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \sin \left(\alpha + \frac{n-1}{2} \beta \right)$$

$$(ii) \quad \cos \frac{\alpha}{2} + \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha + 2\beta) + \dots + \cos \{\alpha + (n-1)\beta\} = \frac{\sin \frac{n\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} \cos \left(\alpha + \frac{n-1}{2} \beta \right)$$

जहाँ : $\beta \neq 2m\pi, m \in I$

coside की गुणन श्रेणी (Product series of cosine series) :

$$\cos \theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 2^2 \theta \cdot \cos 2^3 \theta \dots \dots \dots \cos 2^{n-1} \theta = \frac{\sin 2^n \theta}{2^n \sin \theta}$$

त्रिकोणमितीय व्यंजकों का परिसर (Range of trigonometric expression)

$$E = a \sin \theta + b \cos \theta$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{a^2 + b^2} \left\{ \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \theta + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \theta \right\}$$

$$\text{Let } \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \alpha \text{ \& } \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \alpha$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha), \text{ जहाँ } \tan \alpha = \frac{b}{a}$$

Download FREE Study Package from www.TekoClasses.com & Learn on Video
www.MathsBySuhag.com Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

अतः θ के किसी भी वास्तविक मान के लिए $-\sqrt{a^2 - b^2} \leq E \leq \sqrt{a^2 + b^2}$

EXERCISE - 1

1 - A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

- यदि $\tan \alpha + \cot \alpha = a$ हो, तो $\tan^4 \alpha + \cot^4 \alpha$ का मान है -
 (A) $a^4 + 4a^2 + 2$ (B) $4^4 - 4a^2 + 2$ (C) $4a^4 + 4a^2 - 2$ (D) इनमें से कोई नहीं
- यदि $a \cos \theta + b \sin \theta = 3$ और $a \sin \theta - b \cos \theta = 4$ हो, तो $a^2 + b^2$ का मान है-
 (A) 25 (B) 14 (C) 7 (D) इनमें से कोई नहीं
- $\tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$ का मान है-
 (A) 1 (B) 0 (C) ∞ (D) $\frac{1}{2}$
- व्यंजक $\frac{\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin^3\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \tan\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}$ के सरलीकरण के प्राप्त होता है-
 (A) $\sin x \cos x$ (B) $-\sin^2 x$ (C) $-\sin x \cos x$ (D) $\sin^2 x$
- व्यंजक $3\left[\sin^4\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin^4(3\pi + \alpha)\right] - 2\left[\sin^6\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin^6(5\pi + \alpha)\right]$ का मान है-
 (A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) $\sin 4\alpha + \sin 6$
- $\cos(540^\circ - \theta) - \sin(630^\circ - \theta)$ निम्न में से किसके समान है-
 (A) 0 (B) $2 \cos \theta$ (C) $2 \sin \theta$ (D) $\sin \theta - \cos \theta$
- $\sin(\pi + \theta) \sin(\pi - \theta) \operatorname{cosec}^2 \theta$ का मान है-
 (A) -1 (B) 0 (C) $\sin \theta$ (D) इनमें से कोई नहीं
- यदि $\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta + 1 = 0$ हो, तो $1 + \cot \alpha \tan \beta$ का मान है-
 (A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं
- $\frac{\sin 24^\circ \cos 6^\circ - \sin 6^\circ \sin 66^\circ}{\sin 21^\circ \cos 39^\circ - \cos 51^\circ \sin 69^\circ}$ का मान है।
 (A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) इनमें से कोई नहीं
- यदि $3 \sin \alpha = 5 \sin \beta$ हो, तो $\frac{\tan \frac{\alpha + \beta}{2}}{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}} =$
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- यदि $\tan A$ और $\tan B$ द्विघात समीकरण $x^2 - ax - b = 0$ के मूल हो, तो $\sin^2(A + B)$ का मान है-
 (A) $\frac{a^2}{a^2 + (1+b)^2}$ (B) $\frac{a^2}{a^2 + b^2}$ (C) $\frac{a^2}{(b+c)^2}$ (D) $\frac{a^2}{b^2(1-a)^2}$
- त्रिभुज ABC में यदि $\tan A < 0$ हो, तो -

13. यदि $\tan A - \tan B = x$ और $\cot B - \cot A = y$ हो, तो $\cot(A - B)$ का मान है –
 (A) $\frac{1}{y} - \frac{1}{x}$ (B) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ (C) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (D) इनमें से कोई नहीं
12. यदि $\tan 25^\circ = x$ हो तो, तो $\frac{\tan 155^\circ - \tan 115^\circ}{1 + \tan 155^\circ \tan 115^\circ}$ का मान है –
 (A) $\frac{1-x^2}{2x}$ (B) $\frac{1+x^2}{2x}$ (C) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ (D) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$
15. यदि $A + B = 225^\circ$ हो तो $\left(\frac{\cot A}{1 + \cot A}\right) \cdot \left(\frac{\cot B}{1 + \cot B}\right)$ का मान है–
 (A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 3 (D) $\frac{1}{3}$
16. $\tan 3A - \tan 2A - \tan A$ का मान निम्न में से किस के बराबर है–
 (A) $\tan 3A \tan 2A \tan A$
 (B) $-\tan 3A \tan 2A \tan A$
 (C) $\tan A \tan 2A - \tan 2A \tan 3A - \tan 3A \tan A$
 (D) इनमें से कोई नहीं
17. $\tan 203^\circ + \tan 22^\circ + \tan 203^\circ \tan 22^\circ$ का मान है।
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2
18. $\frac{1 - \tan^2 15^\circ}{1 + \tan^2 15^\circ}$ का मान है–
 (A) 1 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 2
19. यदि A तृतीय चतुर्थांश में हो और $3 \tan A - 4 = 0$ हो, तो $5 \sin 2A + 3 \sin A + 4 \cos A =$
 (A) 0 (B) $-\frac{24}{5}$ (C) $\frac{24}{5}$ (D) $\frac{48}{5}$
20. $\frac{\cos 20^\circ + 8 \sin 70^\circ \sin 50^\circ \sin 10^\circ}{\sin^2 80^\circ}$ का मान है।
 (A) 1 (B) 2 (C) 3/4 (D) इनमें से कोई नहीं
21. यदि $\cos A = 3/4$ हो, तो $16 \cos^2(A/2) - 32 \sin(A/2) \sin(5A/2)$ का मान है–
 (A) -4 (B) -3 (C) 3 (D) 4
22. व्यंजक $\left(1 + \cos \frac{\pi}{10}\right) \left(1 + \cos \frac{3\pi}{10}\right) \left(1 + \cos \frac{7\pi}{10}\right) \left(1 + \cos \frac{9\pi}{10}\right)$ का मान है–
 (A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) 0
23. यदि $\cos \theta = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a}\right)$ हो, तो 'a' के पदों में $\cos 3\theta$ का मान है–

- (A) $\frac{1}{4}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$ (B) $\frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$ (C) $4\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$ (D) इनमें से कोई नहीं
24. $\sin 12^\circ \cdot \sin 48^\circ \cdot \sin 54^\circ$ का संख्यात्मक मान है –
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{16}$ (D) $\frac{1}{8}$
25. यदि $A = \tan 6^\circ \tan 42^\circ$ और $B = \cot 66^\circ \cot 78^\circ$ हो तो–
 (A) $A = 2B$ (B) $A = \frac{1}{3}B$ (C) $A = B$ (D) $3A = 2B$
26. यदि $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ हो, तो
 (A) $\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} = \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2}$
 (B) $\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \tan \frac{\alpha}{2} = 1$
 (C) $\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} = -\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2}$
 (D) $\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \tan \frac{\alpha}{2} = 0$
27. $\cos 0 + \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$ का मान है
 (A) $1/2$ (B) $-1/2$ (C) 0 (D) 1
28. $3 \sin x + 4 \cos x$ का अधिकतम मान है–
 (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 7

एक से अधिक विकल्प सही

29. $\frac{\sin x + \cos x}{\cos^3 x}$ का मान है –
 (A) $1 + \tan x + \tan^2 x + \tan^3 x$ (B) $1 + \tan x + \tan^2 x + \tan^3 x$
 (C) $1 - \tan x + \tan^2 x + \tan^3 x$ (D) $(1 + \tan x) \sec^2 x$
30. यदि $(\sec A + \tan A)(\sec B + \tan B)(\sec C + \tan C) = (\sec A - \tan A)(\sec B - \tan B)(\sec C - \tan C)$ हो, तो दायां पक्ष व बायां पक्ष दोनों निम्न में से किस के बराबर है–
 (A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) इनमें से कोई नहीं
31. निम्न में से कौन-कौन सही है ?
 (A) $\sin 1^\circ > \sin 1$ (B) $\sin 1^\circ < \sin 1$ (C) $\cos 1^\circ > \cos 1$ (D) $\cos 1^\circ < \cos 1$
32. $\frac{(\cos 11^\circ + \sin 11^\circ)}{(\cos 11^\circ - \sin 11^\circ)}$ का मान है–
 (A) $-\tan 304^\circ$ (B) $\tan 56^\circ$ (C) $\cot 214^\circ$ (D) $\cot 34^\circ$
33. यदि $\tan^2 \theta = 2 \tan^2 \phi + 1$ हो, तो $\cos 2\theta + \sin^2 \phi$ का मान है–
 (A) 1 (B) 2 (C) -1 (D) ϕ से स्वतंत्र

34. यदि $\sin t + \cos t = \frac{1}{5}$ हो, तो $\tan \frac{t}{2}$ का मान है—
 (A) -1 (B) $-\frac{1}{3}$ (C) 2 (D) $-\frac{1}{6}$
5. $\frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 250^\circ}$ का मान है।
 (A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (B) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) इनमें से कोई नहीं
6. यदि $A + B + C = \pi$ और $\sin\left(A + \frac{C}{2}\right) = k \sin \frac{C}{2}$ हो, तो $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} =$
 (A) $\frac{k-1}{k+1}$ (B) $\frac{k+1}{k-1}$ (C) $\frac{k}{k+1}$ (D) $\frac{k+1}{k}$
7. $\cot x + \cot(60^\circ + x) + \cot(120^\circ + x)$ का मान है—
 (A) $\cot 3x$ (B) $\tan 2x$ (C) $3 \tan 3x$ (D) $\frac{k+1}{k}$
8. यदि $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ हो, तो $4 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) + \sqrt{4 \sin^4 x + \sin^2 2x}$ सदैव निम्न में से किस के बराबर है—
 (A) 1 (B) 2 (C) -2 (D) इनमें से कोई नहीं
9. यदि तीन कोण A, B, C इस प्रकार है कि
 $\cos A + \cos B + \cos C = 0$ और यदि $\cos A \cos B \cos C = \lambda (\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C)$ हो, तो λ का मान है—
 (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{6}$
10. यदि त्रिभुज ABC में जो कि समकोण त्रिभुज नहीं है $\Sigma \cos A \cdot \operatorname{cosec} B \cdot \operatorname{cosec} C$ का मान है—
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) इनमें से कोई नहीं
11. यदि $3 \cos x + 2 \cos 3x = \cos y$ एवं $3 \sin x + 2 \sin 3x = \sin y$ हो, तो $\cos 2x$ का मान है—
 (A) -1 (B) $\frac{1}{8}$ (C) $-\frac{1}{8}$ (D) $\frac{7}{7}$
12. यदि $x = y \cos \frac{2\pi}{3} = z \cos \frac{4\pi}{3}$ हो, तो $xy + yz + zx =$
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2
13. व्यंजक $\frac{\cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos 2x + 10}{\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x}$ का मान है—
 (A) $\cos 2x$ (B) $2 \cos x$ (C) $\cos^2 x$ (D) $1 + \cos x$
14. यदि $\cos(A - B) = \frac{3}{5}$ और $\tan A \tan B = 2$ हो, तो
 (A) $\cos A \cos B = -\frac{1}{5}$ (B) $\sin A \sin B = -\frac{2}{5}$

- (C) $\cos(A + B) = -\frac{1}{5}$ (D) $\sin A \cos B = \frac{4}{5}$
15. यदि $\cos \alpha + \cos \beta = a$, $\sin \alpha + \sin \beta = b$ और $\alpha - \beta = 2\theta$ हो, तो $\frac{\cos 3\theta}{\cos \theta} =$
 (A) $a^2 + b^2 - 2$ (B) $a^2 + b^2 - 3$ (C) $3 - a^2 - b^2$ (D) $(a^2 + b^2)/4$
16. यदि $A + B + C = \frac{3\pi}{2}$ हो, तो $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C =$
 (A) $1 - 4\cos A \cos B \cos C$ (B) $4 \sin A \sin B \sin C$
 (C) $1 + 2 \cos A \cos B \cos C$ (D) $1 - 4 \sin A \sin B \sin C$
17. यदि $A + B + C = \pi$ और $\cos A = \cos B \cdot \cos C$ हो, तो $\tan B \cdot \tan C$ का मान है—
 (A) 1 (B) $1/2$ (C) 2 (D) 3
18. अन्तराल $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ के लिए, व्यंजक $\frac{\sin \theta + \sin 2\theta}{1 + \cos \theta + \cos 2\theta}$ किस अंतराल में रहेगा —
 (A) $(-\infty, \infty)$ (B) $(-2, 2)$ (C) $(0, \infty)$ (D) $(-1, 1)$

एक से अधिक विकल्प सही

19. यदि समकोण त्रिभुज की भुजाएँ $\{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos(\alpha + \beta)\}$ और $\{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + 2 \sin(\alpha + \beta)\}$ हो, तो त्रिभुज के कर्ण की लम्बाई है—
 (A) $2[1 + \cos(\alpha + \beta)]$ (B) $2[1 - \cos(\alpha + \beta)]$ (C) $4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$ (D) $4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$
20. $0 < \theta < \pi/2$ के लिए $\tan \theta + \tan 2\theta + \tan 3\theta = 0$ होगा यदि
 (A) $\tan \theta = 0$ (B) $\tan 2\theta = 0$ (C) $\tan 3\theta = 0$ (D) $\tan \theta \tan 2\theta = 2$
21. $(a + 2) \sin \alpha + (2a - 1) \cos \alpha = (2a + 1)$ होगा। यदि $\tan \alpha =$
 (A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{2a}{a^2 + 1}$ (D) $\frac{2a}{a^2 - 1}$
22. यदि $\tan x = \frac{2b}{a - c}$, $(a \neq c)$ एवं
 $y = a \cos^2 x + 2b \sin x \cos x + c \sin^2 x$
 $z = a \sin^2 x - 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x$ हो, तो
 (A) $y = z$ (B) $y + z = a + c$ (C) $y - z = a - c$ (D) $y - z = (a - c)^2 + 4b^2$
23. $\left(\frac{\cos A + \cos B}{\sin A + \sin B}\right) + \left(\frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B}\right)^n$ का मान है।
 (A) $2 \tan^n \frac{A - B}{2}$ (B) $2 \cot^n \frac{A - B}{2}$: यदि n सम है
 (C) 0 : यदि n विषम (D) इनमें से कोई नहीं
24. समीकरण $\sin^6 x + \cos^6 x = a^2$ के वास्तविक हल होंगे यदि
 (A) $a \in (-1, 1)$ (B) $a \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ (C) $a \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (D) $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$

25. माना $f(x) = \cos [\pi^2] x + \cos [-\pi^2] x$. जहाँ $[x]$ महत्तम पूर्णांक फलन है, तो
 (A) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ (B) $f(\pi) = 1$ (C) $f(-\pi) = 0$ (D) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$

2-B (विषयात्मक प्रश्न)

- सिद्ध कीजिए कि, $\sin 3x \cdot \sin^3 x + \cos 3x \cdot \cos^3 x = \cos^3 2x$.
- यदि $\tan \alpha = \frac{p}{q}$ जहाँ $\alpha = 6\beta$, α एक न्यून कोण है तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{1}{2}(p \cos 2\beta - q \sec 2\beta) = \sqrt{p^2 + q^2}$$
- यदि $m \tan (\theta - 30^\circ) = n \tan (\theta + 120^\circ)$ हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि $\cos 2\theta = \frac{m+n}{2(m-n)}$
- यदि $\tan \beta = \frac{\tan \alpha + \tan \gamma}{1 + \tan \alpha \tan \gamma}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\sin 2\beta = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\gamma}{1 + \sin 2\alpha \sin 2\gamma}$
- प्रदर्शित कीजिए कि :
 (i) $\cot 7\frac{1}{2}^\circ$ या $\tan 82\frac{1}{2}^\circ = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)$ या $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{6}$
 (ii) $\tan 142\frac{1}{2}^\circ = 2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6}$.
- यदि $\sin x + \sin y = a$ एवं $\cos x + \cos y = b$ हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि

$$\sin(x+y) = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$
 और $\tan \frac{x-y}{2} = \pm \sqrt{\frac{4 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}$.
- त्रिकोणमितीय सारणी का उपयोग न करते हुए निम्न का मान ज्ञात कीजिए –
 (i) $\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$
 (ii) $\cos 10^\circ - \sqrt{3} \sec 10^\circ$
 (iii) $2\sqrt{2} \sin 10^\circ \left[\frac{\sec 5^\circ}{2} + \frac{\cos 40^\circ}{\sin 5^\circ} - 2 \sin 35^\circ \right]$
 (iv) $\cot 70^\circ + 4 \cos 70^\circ$
 (v) $\tan 10^\circ - \tan 50^\circ + \tan 70^\circ$
- सिद्ध कीजिए कि $\tan \alpha + 2 \tan 2\alpha + 4 \tan 4\alpha + 8 \cot 8\alpha = \cot \alpha$.
- यदि $\cos (\beta - \gamma) + \cos (\gamma - \alpha) + \cos (\alpha - \beta) = \frac{-3}{2}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि
 $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$, $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$.
- माना n भुजाओं वाले समबहुभुज के शीर्ष A_1, A_2, \dots, A_n इस प्रकार है कि $\frac{1}{A_1 A_2} = \frac{1}{A_1 A_3} + \frac{1}{A_1 A_4}$. तो n का मान ज्ञात कीजिए।

11. यदि $\frac{ax}{\cos \theta} + \frac{by}{\sin \theta} = a^2 - b^2$ एवं $\frac{ax \sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{by \cos \theta}{\sin^2 \theta} = 0$ हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि
 $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$
12. यदि $P_n = \cos^n \theta + \sin^n \theta$ और $Q_n = \cos^n \theta - \sin^n \theta$ हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि
 $P_n - P_{n-2} = -\sin^2 \theta \cos^2 \theta P_{n-4}$
 $Q_n - Q_{n-2} = -\sin^2 \theta \cos^2 \theta Q_{n-4}$
 इसके उपयोग से प्रदर्शित कीजिए कि $P_4 = 1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$, $Q_4 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$
13. यदि $\sin(\theta + \alpha) = a$ और $\sin(\theta + \beta) = b$ ($0 < \alpha, \beta, \theta < \pi/2$) हो, तो $\cos^2(\alpha - \beta) - 4ab \cos(\alpha - \beta)$ का मान ज्ञात कीजिए—
14. यदि $A + B + C = \pi$ हो, तो सिद्ध कीजिए
 $\tan B \tan C + \tan C \tan A + \tan A \tan B = 1 + \sec A \sec B \sec C$.
15. यदि $\tan^2 \alpha + 2 \tan \alpha \cdot \tan 2\beta = \tan^2 \beta + 2 \tan \beta \cdot \tan^2 \alpha$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक पक्ष 1 के बराबर है या $\tan \alpha = \pm \tan \beta$.

EXERCISE - 3

3 - A (स्तम्भ मिलान)

- | स्तम्भ - I | स्तम्भ -II |
|--|------------|
| (A) $\sin 420^\circ \cos 390^\circ + \cos(-660^\circ) \sin(-330^\circ) =$ | (p) 0 |
| (B) $\tan 315^\circ \cot(-405^\circ) + \cot 495^\circ \tan(-585^\circ) =$ | (q) 1 |
| (C) $\frac{(1 + \tan 8^\circ)(1 + \tan 37^\circ)}{(1 + \tan 22^\circ)(1 + \tan 23^\circ)} =$ | (r) 2 |
| (D) $\left[\frac{\pi}{4}\right] + \left[\frac{1}{3} \sin^2 x\right]$ का मान है— | (s) 5 |
-
- | स्तम्भ - I | स्तम्भ - II |
|---|-------------|
| (A) यदि समीकरण $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \theta$, x के किन्हीं वास्तविक मानों के लिए सत्य हो, तो $\cos \theta$ का मान है— | (p) 2 |
| (B) यदि $\sin \theta + \operatorname{cosec} \theta = 2$ हो, तो $\sin^{2007} \theta + \operatorname{cosec}^{2007} \theta$ का मान है— | (q) 1 |
| (C) $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta$ का अधिकतम मान है— | (r) 0 |
| (D) $2 \sin^2 \theta + 3 \cos^2 \theta$ का न्यूनतम मान है— | (s) -1 |

3-B (कथन/कारण)

3. कथन-1 : λ के पूर्णांक मान, जिसके लिए समीकरण $4 \cos x + 3 \sin x = 2\lambda + 1$ एक हल रखता है, की संख्या 6 है।
 कथन-2 : $\cos \theta + b \sin \theta = c$, जहाँ $a, b, c \in \mathbb{R}$, कम से कम एक हल रखता है यदि $|c| > \sqrt{a^2 + b^2}$

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

4. कथन-1 $\sin 2 > \sin 3$

कथन-2 यदि $x, y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ $x < y$ हो, तो $\sin x > \sin y$

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

5. कथन-1 : $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ के लिए $\frac{\sin^3 x + x + \cos^3 x + 3 \sin^2 x + 3 \sin x + 2}{(\sin x + 1) \cos x}$ का न्यूनतम मान 3 है।

कथन-2 : The least value of $a \sin \theta + b \cos \theta$ is $-\sqrt{a^2 + b^2}$

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

6. कथन-1 : θ का ऐसा कोई मान नहीं है जिसके लिए $\frac{\tan \theta}{\tan 3\theta} = 2$ है।

कथन-2 : यदि $y = \frac{\tan \theta}{\tan 3\theta}$ हो, तो $y \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (3, \infty)$ जहाँ $\theta \neq \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{6}, \theta \neq \frac{m}{3}\pi$ और $n, m \in I$ है।

- (A) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण है।
 (B) कथन-1 सत्य है, कथन-2 सत्य है ; कथन-2, कथन-1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
 (C) कथन-1 सत्य है, कथन-2 असत्य है।
 (D) कथन-1 असत्य है, कथन-2 सत्य है।

3-C (अनुच्छेद)

7. अनुच्छेद

यदि $\cos \alpha + \cos \beta = a$ तथा $\sin \alpha + \sin \beta = b$ एवं θ, α तथा β के मध्य समान्तर माध्य है, तो $\sin 2\theta + \cos 2\theta = 1$

$$+ \frac{nb(a-b)}{a^2 + b^2}$$

जहाँ n कोई पूर्णांक है, तो निम्न प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

7.1 n का मान है—

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) -2

7.2 यदि ऊपर दिये गये प्रश्न में निकाले गए n के मान के लिए $\sin^n A = x$ हो, तो $\sin A \sin 2A \sin 3A \sin 4A$, x में एक बहुपद है जिसकी घात है—

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

- 7.3 यदि पहले वाले प्रश्न में निकाली गई बहुपद की घात p है तथा $(p - 5) + \sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ गुणोत्तर श्रेणी में है, तो $\cos^9 x + \cos^6 x + 3 \cos^5 x - 1 =$
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) इनमें से कोई नहीं

8. अनुच्छेद

माना कि एक त्रिभुज ABC के कोणों की ज्याओं (sines) का गुणनफल p है और कोणों की कोज्याओं (cosines) का गुणनफल q है।

- 8.1 इस त्रिभुज में $\tan A + \tan B + \tan C =$
 (A) $p + q$ (B) $p - q$ (C) $\frac{p}{q}$ (D) इनमें से कोई नहीं

- 8.2 $\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A =$
 (A) $1 + q$ (B) $\frac{1+q}{q}$ (C) $1 + p$ (D) $\frac{1+p}{p}$

- 8.3 $\tan^3 A + \tan^3 B + \tan^3 C$ का मान है—
 (A) $\frac{p^3 - 3pq^2}{q^3}$ (B) $\frac{q^3}{p^3}$ (C) $\frac{p^3}{q^3}$ (D) $\frac{p^3 - 3pq}{q^3}$

3-D (सत्य/असत्य कथन)

9. $\log_2 [\cos^2 (\alpha + \beta) + \cos^2 (\alpha - \beta) - \cos \alpha \cdot \cos \beta]$ का मान α एवं β दोनों पर निर्भर है।
10. यदि $\cos \theta = k, 0 < k < 1$ एवं θ प्रथम चतुर्थांश में नहीं हो, तो $\operatorname{cosec} \theta$ का मान $\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$ है।
11. यदि $270^\circ < A < 360^\circ, 90^\circ < B < 180^\circ, \cos A = 5/13, \tan B = -15/8$ हो, तो $\cos (A + B)$ का मान $\frac{140}{221}$ है।
12. समीकरण $16x^2 - 12x + 1 = 0$ के मूल $\sin^2 18^\circ, \cos^2 36^\circ$ हैं।
13. यदि $\sec \theta + \tan \theta = 1/5$ हो, तो $\sin \theta$ का मान $\frac{12}{13}$ है।

3-E (रिक्त स्थान की पूर्ति)

14. त्रिभुज ABC में यदि $\angle C = \frac{2\pi}{3}$ हो, तो $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos A \cdot \cos B$ का मान _____ है।
15. $\cos^2 73^\circ + \cos^2 47^\circ + (\cos 73^\circ \cdot \cos 47^\circ)$ का यथेष्ट मान (exact value) _____ है।
16. $\cos 20^\circ + 2 \sin^2 55^\circ - \sqrt{2} \sin 65^\circ$ का यथेष्ट मान (Exact value) _____ है।
17. यदि $y = \cos^2 (45^\circ + x) + (\sin x - \cos x)^2$ हो, तो y का अधिकतम व न्यूनतम मान _____ एवं _____ है।

18. यदि $N = \sin^2 \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$ हो, तो $\log_2 N$ का मान _____ है।

EXERCISE - 4

4-A (पूर्ववर्ती JEE परीक्षा प्रश्न)

IIT - JEE - 2006

1. यदि $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ और $t_1 = (\tan \theta)^{\tan \theta}$, $t_2 = (\tan \theta)^{\cot \theta}$, $t_3 = (\cot \theta)^{\tan \theta}$ और $t_4 = (\cot \theta)^{\cot \theta}$ हो, तो
 (A) $t_1 > t_2 > t_3 > t_4$ (B) $t_2 < t_1 < t_3 < t_4$ (C) $t_3 > t_1, t_2 > t_4$ (D) $t_2 > t_3 > t_1 > t_4$

IIT - JEE - 2005

2. t के मानों का परिसर ज्ञात कीजिए जिसके लिए $2 \sin t = \frac{1 - 2x + 5x^2}{3x^2 - 2x - 1}$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. इकाई त्रिज्या के तीन सिक्के समबाहु त्रिभुज में इस प्रकार रखे हैं कि वे आपस में तथा त्रिभुज की भुजाओं को स्पर्श करते हैं, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल है—
 (A) $4 + 2\sqrt{3}$ (B) $6 + 4\sqrt{3}$ (C) $12 + \frac{7\sqrt{3}}{4}$ (D) $3 + \frac{7\sqrt{3}}{4}$

IIT - JEE - 2001

4. प्रतिबंध $0 \leq \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \leq \frac{\pi}{2}$ और $(\cot \alpha_1) \cdot (\cot \alpha_2) \cdot \dots \cdot (\cot \alpha_n) = 1$ पर
 $(\cos \alpha_1) \cdot (\cos \alpha_2) \cdot \dots \cdot (\cos \alpha_n)$ का अधिकतम मान है—
 (A) $1/2^{n/2}$ (B) $1/2^n$ (C) $1/2^n$ (D) 1
5. यदि $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ और $\beta + \gamma = \alpha$ हो, तो $\tan \alpha =$
 (A) $2(\tan \beta + \tan \gamma)$ (B) $\tan \beta + \tan \gamma$ (C) $\tan \beta + 2 \tan \gamma$ (D) $2 \tan \beta + \tan \gamma$

IIT - JEE - 1999

6. त्रिभुज PQR में $\angle R = \frac{\pi}{2}$ यदि $\tan\left(\frac{P}{2}\right)$ एवं $\tan\left(\frac{Q}{2}\right)$ समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) के मूल हो, तो
 (A) $a + b = c$ (B) $b + c = a$ (C) $a + c = b$ (D) $b = c$
7. एक धनात्मक पूर्णांक n के लिए, यदि
 $f_n(\theta) = \left(\tan \frac{\theta}{2}\right)(1 + \sec \theta)(1 + \sec 2\theta)(1 + \sec 4\theta) \dots (1 + \sec 2^{n-1}\theta)$ हो, तो—
 (A) $f_2\left(\frac{\pi}{16}\right) = 1$ (B) $f_3\left(\frac{\pi}{32}\right) = 1$ (C) $f_4\left(\frac{\pi}{64}\right) = 1$ (D) $f_5\left(\frac{\pi}{128}\right) = 1$

IIT - JEE - 1998

8. माना n एक विषम पूर्णांक है एवं θ के प्रत्येक मान के लिए $\sin n\theta = \sum_{r=0}^n b_r \sin^r \theta$ हों, तो

- (A) $b_0 = 1, b_1 = 3$ (B) $b_0 = 0, b_1 = n$
 (C) $b_0 = -1, b_1 = n$ (D) $b_0 = 0, b_1 = n^2 - 3n + 3$
9. यदि इकाई त्रिज्या के वृत्त के अन्दर $A_1A_1A_2A_3A_4A_5$ एक समषट्भुज निर्मित है, तो रेखाखण्ड A_0A_1, A_0A_2 और A_0A_4 का गुणनफल है :
- (A) $\frac{3}{4}$ (B) $3\sqrt{3}$ (C) 3 (D) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
10. निम्न अंकों में से कौन परिमेय है ?
 (A) $\sin 15^\circ$ (B) $\cos 15^\circ$ (C) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$ (D) $\sin 15^\circ \cos 75^\circ$

IIT - JEE - 1997

11. सिद्ध कीजिए कि फलन $\frac{\sin x \cos 3x}{\sin 3x \cos x}$ का मान $\frac{1}{3}$ तथा 3 के बीच में x के किसी भी वास्तविक मान के लिए नहीं है।

IIT - JEE - 1996

12. $\sec^2 \theta = \frac{4xy}{(x+y)^2}$ सत्य है, यदि और केवल यदि -
 (A) $x + y \neq 0$ (B) $x = y, x \neq 0$ (C) $x = y$ (D) $x \neq 0, y \neq 0$

IIT-JEE-1995

13. $3(\sin x - \cos x)^4 + 6(\sin x + \cos x)^2 + 4(\sin^6 + \cos^6 x) =$
 (A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14

IIT-JEE-1994

14. माना $0 < x < \frac{\pi}{4}$, तब $(\sec 2x - \tan 2x) =$
 (A) $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (B) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ (C) $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (D) $\tan^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

.....
4-B (पूर्ववर्ती AIEEE/DCE परीक्षा प्रश्न)

15. यदि $0 < x < \pi$ तथा $\cos x + \sin x = \frac{1}{2}$ तब $\tan x$ है:
 (A) $\frac{(4 - \sqrt{7})}{3}$ (B) $-\frac{(4 + \sqrt{7})}{3}$ (C) $\frac{(1 + \sqrt{7})}{4}$ (D) $\frac{(1 - \sqrt{7})}{4}$
16. यदि α, β इस प्रकार है कि $\pi < \alpha - \beta < 3\pi$. यदि $\sin \alpha + \sin \beta = -\frac{21}{65}$ तथा $\cos \alpha + \cos \beta = -\frac{27}{65}$ तब $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ का मान है—
 (A) $-\frac{3}{\sqrt{130}}$ (B) $\frac{3}{\sqrt{130}}$ (C) $\frac{6}{65}$ (D) $-\frac{6}{65}$
17. यदि $\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} + \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}$ तब u^2 के अधिकतम व न्यूनतम मान के बीच अन्तर है—

Download FREE Study Package from www.TekoClasses.com & Learn on Video
www.MathsBySuhag.com Phone : 0 903 903 7779, 98930 58881

18. $(A) 2(a^2 + b^2)$ $(B) 2\sqrt{a^2 + b^2}$ $(C) (a + b)^2$ $(D) (a - b)^2$
 $\tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 89^\circ$ का मान बराबर है—
 $(A) 1$ $(B) \frac{\pi}{2}$ $(C) 2$ $(D) -1$
19. $\sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 90^\circ$ का मान है —
 $(A) 10$ $(B) 9$ $(C) 9.5$ $(D) 8$
20. व्यंजक $\cos 1^\circ \cos 2^\circ \dots \cos 179^\circ$ का मान बराबर है—
 $(A) 0$ $(B) 1$ $(C) \frac{1}{\sqrt{2}}$ $(D) -1$
21. यदि $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \beta + \gamma = \alpha$ तब $\tan \alpha =$
 $(A) \tan \beta + \tan \lambda$ $(B) 2(\tan \beta + \tan \gamma)$ $(C) \tan \beta + 2 \tan \gamma$ $(D) 2 \tan \beta + \tan \gamma$
22. कौनसा सही है ?
 $(A) \sin 1^\circ < \sin 1$ $(B) \sin 1^\circ = \sin 1$ $(C) \sin 1^\circ > \sin 1$ $(D) \sin 1^\circ = \sin \frac{\pi}{180}$
-

ANSWERS

EXERCISE # 1 – A

1. B 2. A 3. A 4. D 5. B 6. A 7. A
 8. D 9. A 10. D 11. A 12. B 13. C 14. A
 15. B 16. A 17. C 18. C 19. A 20. B 21. C
 22. B 23. B 24. D 25. C 26. A 27. D 28. C
 29. BD 30. AB 31. BC 32. ABCD 33. D 34. BC
 35. BD 36. CD 37. AB 38. AB 39. BD

EXERCISE # 1 – B

3. $a^{2b^2} + 4a^2 = 9b^2$
 4. (i) $\frac{\pi}{12}$ (ii) $\frac{4\pi}{3}$ (iii) $\frac{53\pi}{18}$
 5. (i) 135^0 (ii) -720^0 (iii) 300^0 (iv) 210^0
 8. (i) $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ (ii) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iii) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
 (iv) 1
 27. (i) 1 (ii) $-\sqrt{5}/4$ 29. $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$
 39. $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ 40. (i) 2, -1 (ii) 3, 0
 41. (i) $y_{\max} = 11; y_{\min} = 1$ (ii) $y_{\max} = \frac{13}{3}; y_{\min} = -1$
 (iii) $y_{\max} = 10; y_{\min} = -4$

EXERCISE # 2- A

1. C 2. D 3. B 4. A 5. B 6. A 7. D
 8. B 9. A 10. B 11. A 12. B 13. B 14. C
 15. B 16. D 17. C 18. A 19. AC 20. CD

21. BD 22. BC 23. BC 24. BD 25. AC

EXERCISE # 2 – B

7. (i) 4 (ii) 4 (iii) 4 (iv) $\sqrt{3}$ (v) $\sqrt{3}$
 10. $n = 7$ 13. $1 - 2a^2 - 2b^2$

EXERCISE # 3

1. (A) \rightarrow (q), (B) \rightarrow (r), (C) \rightarrow (q), (D) \rightarrow (q)
 2. (A) \rightarrow (q,s), (B) \rightarrow (q), (C) \rightarrow (q), (D) \rightarrow (q)
 3. C 4. A 5. B 6. A 7.1 C 7.2 A 7.3 B
 8.1 C 8.2 B 8.3 D 9. True
 10. False $\left(-1 \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\right)$ 11. True
 12. True 13. False $\left(-\frac{12}{13}\right)$ 14. $\frac{3}{4}$
 15. $3/4$ 16. 1 17. 3 & 0 18. -2

EXERCISE # 4

1. B 2. $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{10}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{10}, \frac{\pi}{2}\right]$ 3. B 4. A
 5. C 6. A 7. ABCD 8. B 9. C 10. C
 12. B 13. C 14. B 15. B 16. A 17. D 18. D
 19. C 20. A 21. C 22. A

MQB

EXERCISE # 1 (बहुविकल्पीय प्रश्न)

केवल एक विकल्प सही

1. $\cos 10^\circ - \sin 10^\circ$ का मान है—
 (A) धनात्मक (B) ऋणात्मक (C) 0 (D) 1
2. $\tan \frac{\pi}{16} + 2 \tan \frac{\pi}{8} + 4$ का मान बराबर है—
 (A) $\cot \frac{\pi}{8}$ (B) $\cot \frac{\pi}{16}$ (C) $\cot \frac{\pi}{16} - 4$ (D) इनमें से कोई नहीं
3. $\cos \frac{\pi}{19} + \cos \frac{3\pi}{19} + \cos \frac{5\pi}{19} + \dots + \cos \frac{17\pi}{19}$ का मान बराबर है—
 (A) $1/2$ (B) 0 (C) 1 (D) इनमें से कोई नहीं
4. $\frac{3 + \cot 76^\circ \cot 16^\circ}{\cot 76^\circ + \cot 16^\circ}$ का मान है—
 (A) $\cot 44^\circ$ (B) $\tan 44^\circ$ (C) $\tan 2^\circ$ (D) $\cot 46^\circ$
5. $\cot 70^\circ + 4 \cos 70^\circ$ का मान बराबर है—
 (A) 1 (B) $\sqrt{3}$ (C) 2 (D) 3
6. यदि $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$ हो, तो $\sqrt{2 \cot \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha}}$ का मान बराबर है—
 (A) $1 + \cot \alpha$ (B) $-1 - \cot \alpha$ (C) $1 - \cot \alpha$ (D) $-1 + \cot \alpha$
7. यदि $f(\theta) = \sin^4 \theta + \cos^2 \theta$ हो, तो $f(\theta)$ का परिसर है—
 (A) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (B) $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ (C) $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$ (D) इनमें से कोई नहीं
8. यदि $2 \cos x + \sin x = 1$ हो, तो $7 \cos x + 6 \sin x$ का मान बराबर है—
 (A) 2 या 6 (B) 1 या 3 (C) 2 या 3 (D) इनमें से कोई नहीं
9. यदि $\operatorname{cosec} A + \cot A = \frac{11}{2}$ हो, तो $\tan A$ का मान है—
 (A) $\frac{21}{22}$ (B) $\frac{15}{16}$ (C) $\frac{44}{117}$ (D) $\frac{117}{43}$

10. यदि $0^0 < x < 90^0$ और $\cos x = \frac{3}{\sqrt{10}}$ हो, तो $\log_{10} \sin x + \log_{10} \cos x + \log_{10} \tan x$ का मान है –
 (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) इनमें से कोई नहीं
11. यदि $f(\theta) = (\sin \theta + \operatorname{cosec} \theta)^2 + (\cos \theta + \sec \theta)^2$ हो, तो $f(\theta)$ का न्यूनतम मान है—
 (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) इनमें से कोई नहीं
12. यदि $\cot \alpha + \tan \alpha = m$ और $\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha = n$ हो, तो
 (A) $m(mn^2)^{1/3} - n(nm^2)^{1/3} = 1$ (B) $m(m^2n)^{1/3} - n(nm^2)^{1/3} = 1$
 (C) $n(mn^2)^{1/3} - m(nm^2)^{1/3} = 1$ (D) इनमें से कोई नहीं
13. यदि $2 \sec^2 \alpha - \sec^4 \alpha - \operatorname{cosec}^2 \alpha + \operatorname{cosec}^4 \alpha = 15/4$ हो, तो $\tan \alpha$ का मान बराबर है—
 (A) $1/\sqrt{2}$ (B) $1/2$ (C) $1/2\sqrt{2}$ (D) $1/4$
14. यदि $\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ और $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $0 < A, B < \pi/2$ हो, तो $\tan A + \tan B$ का मान बराबर है—
 (A) $\sqrt{3}/\sqrt{5}$ (B) $\sqrt{5}/\sqrt{3}$ (C) 1 (D) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})/\sqrt{5}$
15. यदि $3 \sin x + 4 \cos x = 5$ हो तो $4 \sin x - 3 \cos x$ का मान बराबर है—
 (A) 0 (B) 1 (C) 5 (D) इनमें से कोई नहीं
16. यदि $\sin 2\theta = k$ हो, तो $\frac{\tan^3 \theta}{1 + \tan^2 \theta} + \frac{\cot^3 \theta}{1 + \cot^2 \theta}$ का मान बराबर है—
 (A) $\frac{1-k^2}{k}$ (B) $\frac{2-k^2}{k}$ (C) $k^2 + 1$ (D) $2 - k^2$
17. यदि $f(\theta) = \sin^2 \theta + \sin^2\left(\theta + \frac{2\pi}{2}\right) + \sin^2\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)$ हो, तो $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ का मान बराबर है—
 (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

एक से अधिक विकल्प सही

18. यदि $3 \sin \beta = \sin(2\alpha + \beta)$ हो, तो $\tan(\alpha + \beta) - 1 \tan \alpha$ है—
 (A) α से स्वतंत्र (B) β से स्वतंत्र
 (C) α और β दोनों पर निर्भर (D) α से स्वतंत्र लेकिन β पर निर्भर

EXERCISE # 2 (विषयात्मक प्रश्न)

1. प्रदर्शित कीजिए कि : $4 \sin 27^\circ = (5 + \sqrt{5})^{1/2} - (3 - \sqrt{5})^{1/2}$
2. समीकरण $\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$ का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि $\frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3} = \frac{1}{(a+b)^3}$
3. सिद्ध कीजिए कि : $\operatorname{cosec} \theta + \operatorname{cosec} 2\theta + \operatorname{cosec} 2^2\theta + \dots + \operatorname{cosec} 2^{n-1}\theta = \cot(\theta/2) - \cot 2^{n-1}\theta$ तथा इसके आधार पर
सिद्ध कीजिए $\operatorname{cosec} \frac{4\pi}{15} + \operatorname{cosec} \frac{8\pi}{15} + \operatorname{cosec} \frac{16\pi}{15} + \operatorname{cosec} \frac{32\pi}{15} = 0$
4. यदि $\cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$; $\sin(\alpha - \beta) = \frac{5}{13}$ और $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{4}$ हो, तो $\tan 2\alpha$ का मान ज्ञात कीजिए।
5. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में θ के सभी मानों के लिए प्रदर्शित कीजिए $\cos(\sin \theta) > \sin(\cos \theta)$.
6. यदि $A + B + C = \pi$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि –
 - (i) $\tan^2 \frac{A}{2} + \tan^2 \frac{B}{2} + \tan^2 \frac{C}{2} \geq 1$
 - (ii) $\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.
 - (iii) $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$
7. 10 cm त्रिज्या वाले वृत्त के चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए जो केन्द्र पर 45° का कोण आपतित करता है।
8. यदि दो वृत्त जिनके चाप की लम्बाई समान है, केन्द्र पर 75° और 120° का कोण बनाते हैं, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।
9. यदि $\tan x = \frac{3}{4}$; $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ हो, तो $\sin \frac{x}{2}$ और $\cos \frac{x}{2}$ का मान ज्ञात कीजिए।
10. यदि $xy + yz + zx = 1$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} = \frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$

11. सिद्ध कीजिए कि :

(i) $\sec^4 A (1 - \sin^4 A) - 2 \tan^2 A = 1$

(ii) $\frac{\cot^2 \theta (\sec \theta - 1)}{1 + \sin \theta} = \sec^2 \theta \cdot \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sec \theta}$

12. त्रिभुज ABC में, सिद्ध कीजिए कि $\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} = 1 + 4 \sin \left(\frac{\pi - A}{4} \right) \sin \left(\frac{\pi - B}{4} \right) \sin \left(\frac{\pi - C}{4} \right)$

Answers

EXERCISE # 1

1. A 2. B 3. A 4. A 5. B 6. B 7. C
 8. A 9. C 10. C 11. C 12. A 13. A 14. D
 15. A 16. B 17. B 18. AB

EXERCISE # 2

4. $\frac{56}{33}$ 7. $\frac{5\pi}{2}$ cm
 8. $r_1 : r_2 = 8 : 5$
 9. $\sin \frac{x}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ and $\cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

**for 39 Yrs. Que. of IIT-JEE(ADVANCE)
 &
 15 Yrs. Que. of AIEEE(MAIN)
 we have distributed already a book**